Problemi per tutti
Gianfranco Arrigo

Scopo dell’articolo è di aiutare gli insegnanti ad arricchire la raccolta di problemi adatti per l’educazione al *problem solving*. Le idee si possono prendere dalla vasta letteratura, da internet, oppure si possono creare, osservando con occhio attento la realtà di tutti i giorni.
Le idee vanno poi tradotte in consegne per gli allievi, consegne che possono essere formulate testualmente, oralmente, graficamente, o anche mediante brevi momenti di drammatizzazione.
Di seguito vengono presentati diversi problemi di tipo combinatorio e sui numeri naturali.

1. Introduzione

L’importanza di preparare gli allievi di ogni ordine scolastico ad affrontare «veri» problemi è sottolineata continuamente nella letteratura specialistica. L’abbiamo ribadito più volte anche sulla nostra rivista[1]. Come mai se ne parla così tanto? È forse l’ennesima moda didattica e come tale destinata a scomparire in un futuro prossimo? In fondo, si dirà, di problemi se ne sono sempre assegnati, a partire dalla scuola elementare, su su fino alle università e ai politecnici. La matematica stessa è fatta di problemi. Ma anche la nostra vita, privata e professionale, ludica e no, è costellata di problemi. Occorre però richiamare la differenza fondamentale esistente tra due grandi categorie di problemi.

Come già scritto, distinguiamo tra «esercizi», cioè, problemi che richiedono al solutore solo l'uso di regole già apprese o in via di consolidamento (utili per l’assestamento o per la verifica dell’apprendimento) e «(veri) problemi»[2] che esigono l'uso contemporaneo di più conoscenze o capacità, anche in via di sviluppo, o comportamenti di tipo strategico, improntati alla creatività e all’intuizione. È sotto l’occhio di tutti che la scuola in generale ha finora lavorato molto sugli esercizi e poco sui problemi e non sempre con le dovute convinzione e consapevolezza da parte degli insegnanti[3].

Per contro, come già affermato, la società odierna, così tecnicizzata, burocratizzata e immersa nella comunicazione globale, richiede a ogni individuo - cittadino, lavoratore, professionista ecc. - anche e soprattutto l’abitudine e la capacità di affrontare situazioni nuove, di operare scelte strategiche, di essere pronti non solo ad applicare le conoscenze apprese a scuola, ma anche a modificarle e adattarle a situazioni mutevoli[4]. Attività, queste ultime, che non si possono far apprendere mediante serie di esercizi, ma che occorre sviluppare mettendo frequentemente gli allievi di fronte a problemi, nell’accezione del termine appena descritta.
Detto questo, agli insegnanti rimane il compito di accentuare l’attività di risoluzione di problemi; meglio ancora, di coniugare l’usuale prassi didattica con gli atteggiamenti tipici della risoluzione di problemi. In sintesi, occorre passare dalla figura di insegnante che dà sempre sicurezze insistendo fin che tutti (o quasi?) imparino a quella di «animatore»[5] che problematizza la conquista del sapere, che propone interrogativi, che abitua i propri allievi a formulare congetture e a verificarne la validità, insomma a costruire il proprio sapere.

[1] Vedere per esempio: Arrigo G. (2014). *Conversioni e trattamenti semiotici nel problem solving*. Bollettino dei docenti di matematica, nr. 69. Bellinzona: UIM-CDC, p. 85-104.
[2] Da qui in avanti useremo il solo termine «problemi».
[3] Fra le cause del parziale insuccesso dei nostri allievi nelle prove internazionali PISA, c’è sicuramente anche l’insufficiente abitudine degli stessi ad affrontare problemi.
[4] Vedere per esempio: D’Amore B. (2014). *Il problema di matematica nella pratica didattica*. Prefazioni di Gérard Vergnaud e di Silvia Sbaragli. Modena: Digital Index. [Versione cartacea e versione e-book].
[5] Termine provvisorio.

Per raggiungere questo importante obiettivo l'insegnante deve poter disporre di una banca di problemi, continuamente aggiornabile. Ci si può ispirare consultando le ricche raccolte scaricabili dalla rete[6], proposte che occorre poi reinterpretare, modificare e adattare alle esigenze della classe. Oppure se ne può creare di completamente nuove, acquisendo a poco a poco l'abitudine a osservare in modo attento e critico tutto ciò che ci passa sotto gli occhi, una moltitudine caotica di stimoli, che ogni tanto - e quando meno ci si aspetta - fornisce interessanti aspetti problematici che possono generare valide proposte per il lavoro in classe.
Di seguito faccio seguire una prima sequenza di problemi, già adattati. Ovviamente ogni insegnante potrà apportarvi altre modifiche. Inoltre va detto che non sempre le proposte devono essere formulate testualmente: a seconda delle situazioni si può ricorrere a presentazioni orali, drammatizzate, figurali ecc.

Infine, le domande dei problemi possono anche essere formulate in collaborazione con gli allievi, per esempio mediante una discussione della situazione problematica. A volte possono nascere interrogativi non previsti, che l'insegnante deve poi selezionare, perfezionare e mettere in forma tale da essere compresa da tutti gli allievi. Di questo passo può sorgere l'idea di modificare la situazione iniziale sia allargando sia limitando il campo d'azione, fino addirittura a creare nuove situazioni, anche seguendo le stimolazioni che vengono dalla classe.

Le situazioni che presento di seguito sono ordinate secondo un filo logico rispondente a esigenze didattiche, e sono adatte per un'introduzione nel mondo della risoluzione di problemi[7]. La prima situazione, concernente gli anagrammi, è in seguito sfruttata per risolvere problemi apparentemente diversi, ma sottesi dalla stessa struttura matematica. Un tale modo di procedere può anche essere seguito nelle scuole superiori per avvicinare gli allievi in modo costruttivo al calcolo combinatorio elementare, senza incorrere nella solita prassi del tutto inefficace di presentare separatamente i concetti di permutazione, combinazione e distribuzione (con o senza ripetizioni…), che si presta bene per la memorizzazione di formule, che però, se non è preceduta da una fase di apprendimento euristico, lascia lo studente del tutto inerme di fronte a situazioni applicative.
Seguendo il percorso di apprendimento descritto sopra, l'allievo, eventualmente avvalendosi del discreto intervento dell'insegnante, scopre un'altra caratteristica importante del fare matematica: vi sono problemi apparentemente diversi che però sono basati sulla stessa struttura matematica. La situazione degli anagrammi di una parola, come si vedrà nel seguito, fornisce anche la struttura per risolvere problemi di passeggiate su griglie, di scelta di sottoinsiemi, e può essere molto utile per capire, più tardi, in un contesto algebrico, lo sviluppo della potenza di un binomio e, nel calcolo delle probabilità, la distribuzione binomiale.

2. Anagrammi

2.1 Anagrammi di parole senza lettere ripetute

Se di una parola se ne fa un'altra scambiando di posto alcune lettere, si ottiene un anagramma[8]. Per esempio, da PARCO si può ottenere CAPRO.

Domande possibili[9]

---

6 Si vedano, per esempio, http://www.kangourou.it, http://www.matematicamente.it, http://www.math.unipr.it/~rivista/RALLY/Edizioni.htm

7 Gran parte di queste attività sono state svolte in classe soprattutto nei pomeriggi matematici organizzati dalla Società Matematica della Svizzera Italiana nelle scuole elementari e medie.

8 Attenzione: non è necessario che un anagramma sia una parola di senso compiuto nella lingua di riferimento.

- *Quali e quanti anagrammi si possono ottenere partendo dalla parola APE? (Attento: anche APE è anagramma della parola APE).*
- *Quali e quanti anagrammi ha la parola CANE?*
- *Quanti anagrammi ha la parola POETA?*
- *Quanti anagrammi ha la parola SCARTO?*
- *Scrivi il calcolo che permette di trovare il numero di anagrammi della parola PROBLEMA e decidi come procedere per trovare il risultato.*
- *Trova quanti anagrammi ha la parola INCOMPRESA. Usa pure la calcolatrice, ma prima stima questo numero: sarà più grande di 10'000? Di 100'000? di 1 milione?*

Commento[10]

La parola APE, come qualsiasi altra composta di sole tre lettere diverse, si presta per far compiere il primo passo. All'inizio gli allievi procedono per tentativi: APE, PEA, EPA, per esempio.
A un certo punto non riescono a trovarne altre e concludono che non ce ne sono più.
Se però i tentativi sono avvenuti casualmente, non si ha la sicurezza di averli trovati tutti. Occorre applicare un criterio, costruire un ragionamento. Si potrebbe far capo all'ordine alfabetico:
AEP, APE, EAP, EPA, PAE, PEA
oppure si potrebbe procedere con le parole che iniziano per A, poi continuare con quelle che iniziano per P e infine terminare con quelle che iniziano per E:

APE	PAE	EPA
AEP	PEA	EAP

Si ritrovano i 6 anagrammi di prima e in più lo schema ci suggerisce: $6 = 3 \cdot 2$
Passando poi a CANE, POETA e SCARTO l'allievo può osservare che:
una parola di 4 lettere diverse ha $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ anagrammi; numero che si indica con 4! e che si legge «quattro fattoriale», una parola di 5 lettere diverse ha $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ anagrammi, cioè 5!, una parola di 6 lettere diverse ha $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 720$ anagrammi, cioè 6! e così via.
Per calcolare quanti anagrammi ha la parola PROBLEMA, l'uso della calcolatrice appare il più adatto. Si può calcolare, con un po' di pazienza e molta attenzione, il prodotto dei sette fattori diversi da 1:
$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 8! = 40'320$ anagrammi
ma si può anche usare il tasto «x!». Per esempio, se si preme «3» seguito da «x!» sul display appare 6, cioè il numero di anagrammi di una parola di tre lettere diverse ($3 \cdot 2$).
Il risultato è tutt'altro che intuitivo. I fattoriali dei numeri naturali crescono enormemente.
La parola INCOMPRESA è un bell'esempio per stupire l'allievo. Prima di calcolare il numero di anagrammi è interessante far stimare il risultato. Di solito, solo circa metà della classe pensa che il numero sia maggiore di 100'000, ma nessuno si azzarda a dire che sia maggiore di 1 milione.
Si ottiene: $10! = 3'628'800$, cioè molto di più delle stime che solitamente propongono gli allievi. È un bel momento didattico: l'allievo vede come la matematica possa sopperire quando il «buon senso» inganna.

2.2 Anagrammi di parole con lettere ripetute

Domanda a bruciapelo:

---

[9] I testi in corsivo e le immagini relative sono esempi di consegne scritte. Come già affermato, le diverse situazioni possono anche essere presentate in altre forme e le domande costruite anche con l'intervento degli allievi.
[10] I commenti sono essenzialmente di natura didattica. Come aiuto per gli insegnanti non matematici sono indicati anche i risultati.

- *Quanti anagrammi ha la parola ALA?*

Se hai risposto 3! = 3 · 2 hai sbagliato. La presenza di due lettere uguali (AA) diminuisce il numero di anagrammi, come puoi vedere dal seguente elenco:

*LA**A*** *L**A**A*	***A**LA* *AL**A***	***A**AL* *A**A**L*

Se si scambiano tra di loro le due lettere A, si ottiene lo stesso anagramma. Quindi la parola ALA ha solo 3 = 3! : 2! anagrammi.

Domande possibili

- *Quanti anagrammi hanno le seguenti parole?*
  ATTO – TUTTO – MAMMA – ABRACADABRA – TRALLALLA
- *Se hai risposto bene alla domanda precedente, puoi divertirti a calcolare il numero di anagrammi del tuo nome, di quello dei tuoi familiari e amici, di qualsiasi parola tu desideri.*

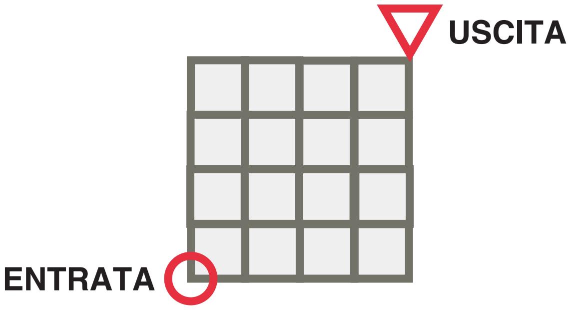
Commento

Con questa attività l'allievo può compiere un nuovo importante passo in avanti, che lo porta a essere capace di calcolare il numero di anagrammi di qualsiasi parola.
Il testo propone un semplice esempio per entrare nella nuova situazione.
Se si applica lo stesso ragionamento usato per ALA, la parola ATTO ha 4! : 2! = 24 : 2 = 12 anagrammi.
Una parola come TUTTO costituisce un banco di prova decisivo per valutare il grado di comprensione degli allievi. Essa possiede 5! : 3! = 120 : 6 = 20 anagrammi. Un errore comune conduce a calcolare 120 : 3. In questi casi si può prendere uno dei 20 anagrammi e scrivere le tre T con colori diversi (o variando la grafica), per esempio: **T**UTTO e far scrivere le 6 parole ottenibili scambiando di posto le lettere «ti»:
TUTTO, **T**UTTO, TU**T**TO, TUT**T**O, TU**T**TO, TUT**T**O
La parola MAMMA aiuta a compiere l'ultimo passo. Il numero di anagrammi può essere calcolato in due tappe:
5! : 3! = 120 : 6 = 20 perché vi sono 3 M,
20 : 2! = 10 perché vi sono 2 A
oppure in una sola espressione numerica
(5! : 3!) : 2! = (120 : 6) : 2 = 20 : 2 = 10
Analogamente, gli anagrammi di ABRACADABRA sono
[(11! : 5!) : 2!]: 2! = 83'160
e gli anagrammi di TRALLALLA sono
(9! : 3!) : 4! = 2520
A questo punto la soddisfazione degli allievi è molta e ben visibile sui loro volti e la terza domanda giunge a proposito.

3. Percorsi su griglie rettangolari

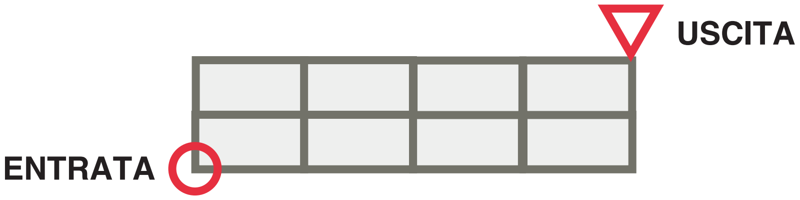
Qui sotto trovi le mappe di tre giardini pubblici. Li devi attraversare, compiendo percorsi di lunghezza minima, partendo dall'ENTRATA, camminando lungo i vialetti scuri, fino all'USCITA.

3.1 Il Parco Quadrato



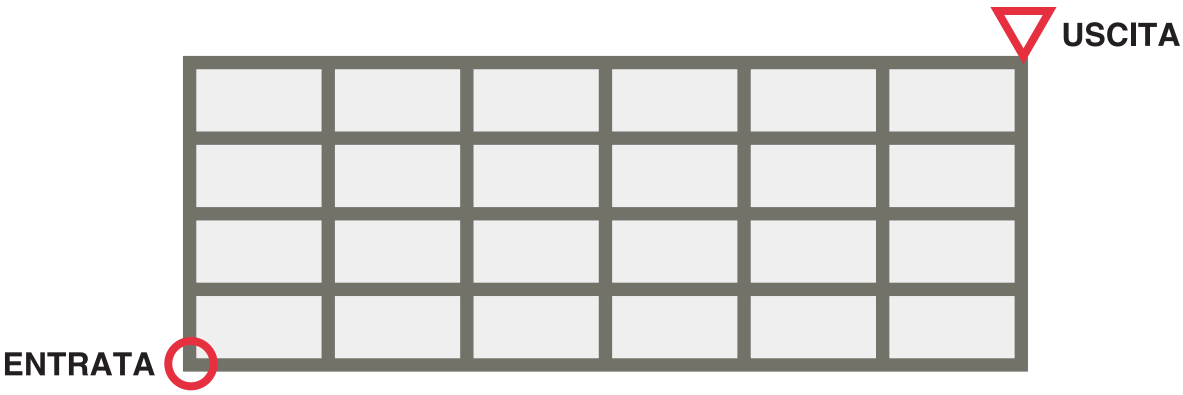
Il lato di ogni aiola ha lunghezza 15 m.

3.2 Il Parco Rettangolo



Le dimensioni di ogni aiola sono 30 m e 15 m.

3.3 Il Grande Parco Rettangolo



Le dimensioni di ogni aiola sono 40 m e 20 m.
Anche qui devi attraversare il parco senza calpestare le aiole.

Domande possibili

Per ciascun parco:

- *Disegna qualche percorso minimo.*
- *Qual è la lunghezza di un percorso minimo?*
- *Quanti percorsi minimi esistono?*
  [Suggerimento: a ogni biforcazione si hanno solo due scelte possibili: andare a destra (D) o verso l'alto del foglio (A), quindi ogni percorso è codificabile con una parola le cui lettere sono A e D, ripetute seguendo un certo ordine.]

Commento

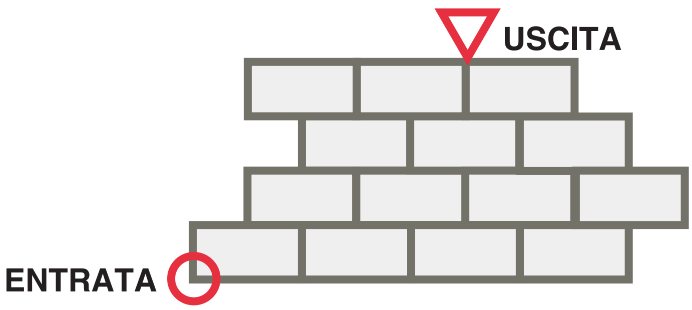
Le prime due domande proposte hanno lo scopo di familiarizzare l'allievo con la nuova situazione. Come suggerito tra parentesi, uno dei modi per calcolare il numero di percorsi minimi consiste nel far corrispondere a ciascuno una parola; con ciò si codifica il percorso e si cambia registro semiotico, da quello geometrico a quello combinatorio già conosciuto. Il numero di percorsi minimi è quindi uguale a quello degli anagrammi di questa parola: ecco un chiaro esempio di due situazioni diverse (anagrammi e percorsi minimi su griglie) che hanno la stessa struttura matematica.
Se, nel Parco Quadrato, come suggerito, codifichiamo ogni percorso con una parola composta delle sole lettere D («vai a destra») e A («vai verso l'alto»), i percorsi minimi corrispondono agli anagrammi della parola DDDDAAAA: sono quindi $(8! : 4!) : 4! = 70$. La lunghezza di ogni percorso minimo è $15 \text{ m} \cdot 8 = 120 \text{ m}$
Per il Parco Rettangolo occorre calcolare il numero di anagrammi della parola DDDDAA che sono $(6! : 4!) : 2! = 15$. La lunghezza di ogni percorso minimo è
$30 \text{ m} \cdot 4 + 15 \text{ m} \cdot 2 = 150 \text{ m}$
Nel Grande Parco Rettangolo, i diversi percorsi minimi sono $(10! : 6!) : 4! = 210$. Anche questo risultato può essere trovato senza fare ricorso alla calcolatrice, operando con frazioni equivalenti ed esercitando il calcolo mentale:

$$\frac{10!}{6! \cdot 4!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 10 \cdot 3 \cdot 7 = 210$$

La lunghezza di ogni percorso minimo è
$40 \text{ m} \cdot 6 + 20 \text{ m} \cdot 4 = 320 \text{ m}$

4. Percorsi piani più impegnativi

4.1 Il Parco Muratori

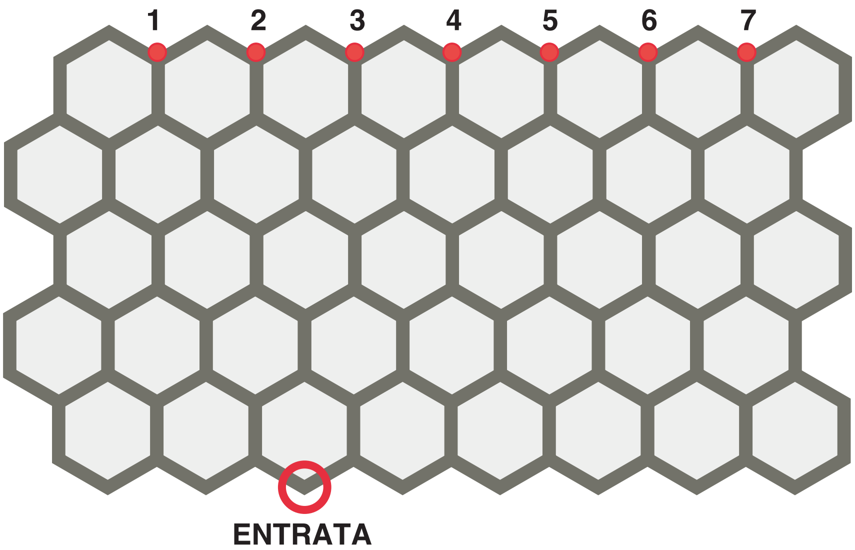


Le dimensioni di ogni aiola sono 30 m e 15 m.

Domande possibili

- *Disegna almeno un percorso minimo.*
- *Trova la lunghezza di un percorso minimo.*
- *Determina il numero di percorsi minimi esistenti.*

4.2 Il Parco Esagono



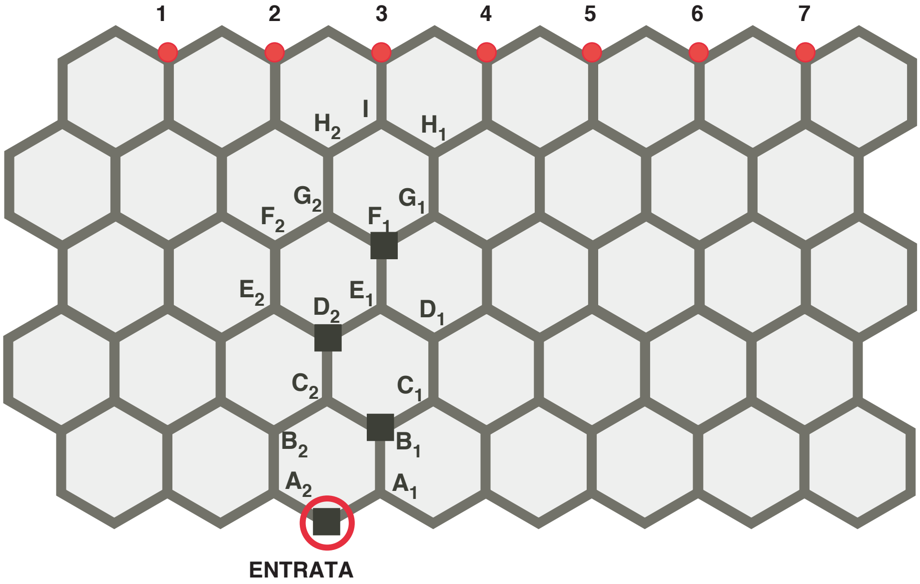
Il lato di ogni aiuola esagonale è lungo 10 m. Vi è una sola entrata. I cerchietti rossi indicano i cancelli di uscita.

Domande possibili

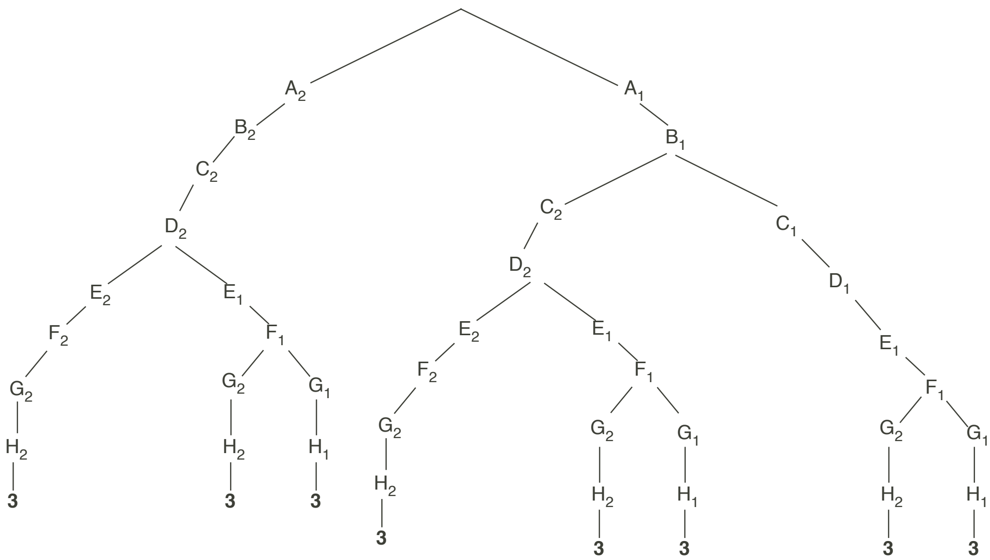
- *Disegna alcuni percorsi minimi che portano all'uscita 3 e altri che portano all'uscita 5.*
- *In quali cancelli di uscita terminano i percorsi più brevi e qual è la loro lunghezza?*
- *Vi sono cancelli di uscita raggiungibili con un solo percorso minimo? Se sì, quali?*
- *Determina il numero di percorsi minimi che portano all'uscita 5 e all'uscita 3.*

Commento

Se si cerca di disegnare percorsi minimi del Parco Muratori, ci si accorge presto che occorre evitare di percorrere segmenti orizzontali (o verticali) nei due sensi. Il solo percorso minimo ha lunghezza $30 \text{ m} + 7 \cdot 15 \text{ m} = 135 \text{ m}$
Più complessa è la situazione del Parco Esagono, soprattutto per la determinazione del numero di percorsi minimi che portano all'uscita 3. Essi hanno lunghezza 100 m e in tutto sono 8. Il loro conteggio può essere fatto, per esempio, disegnando uno schema ad albero. Nella figura seguente, con lettere indicizzate si sono segnati i punti toccati dai vari percorsi.



Ed ecco l'albero che illustra gli 8 percorsi minimi che portano all'uscita 3.

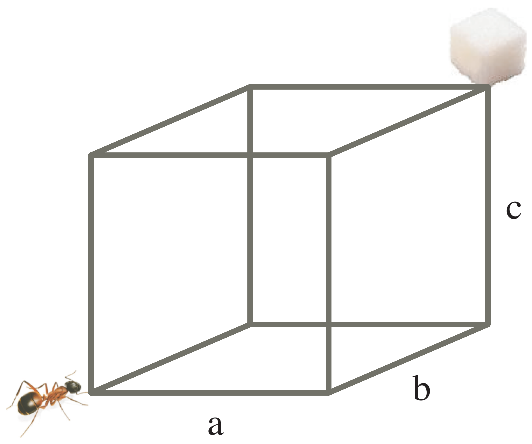


Ovviamente questo modo di risolvere il problema del conteggio è destinato all'insegnante. Gli allievi possono operare con matite colorate, meglio se riproducendo percorsi diversi su fogli diversi. Per l'uscita 5 vi è un solo percorso minimo, lungo 100 m. I percorsi di 100 m sono quelli più brevi e portano alle uscite 1, 2, 3, 4 e 5.
L'uscita 5 è l'unica ad avere un solo percorso minimo.

5. Percorsi tridimensionali

5.1 Un percorso semplice

Una formichina furba vuole raggiungere la zolletta di zucchero che si trova nel vertice opposto di un parallelepipedo scheletrato. Quindi sceglierà uno dei percorsi più corti (minimi).

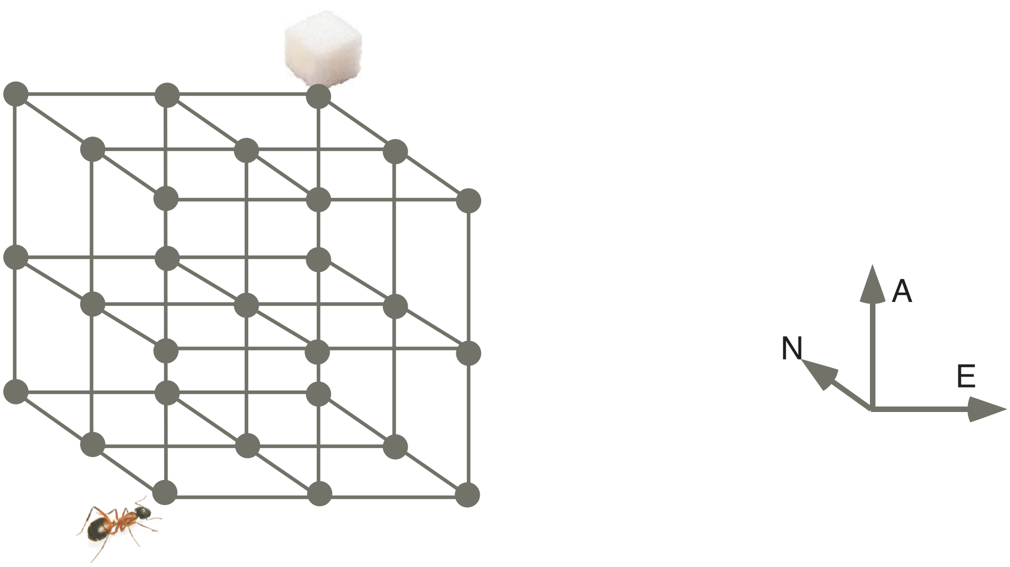


Domande possibili

- *Disegna qualche percorso minimo.*
- *Quanti percorsi minimi esistono?*
  [Ogni percorso minimo può essere codificato con una parola di tre lettere.]

5.2 Un percorso più complesso

La figura rappresenta una costruzione composta di 8 cubetti, costituita di barrette tenute insieme da sferette.
La formica vuole raggiungere la zolla di zucchero seguendo il percorso più breve. Può camminare solo lungo le barrette.



Domande possibili

Disegna qualche percorso minimo.

Calcola quanti percorsi minimi esistono.
[In ogni nodo si hanno tre scelte sensate possibili: verso est (E), verso nord (N) o verso l'alto (A), quindi ogni percorso è codificabile con una parola le cui lettere sono E, N, A.]

Quante sferette e quante barrette si sono impiegate nella costruzione?

Commento e generalizzazione

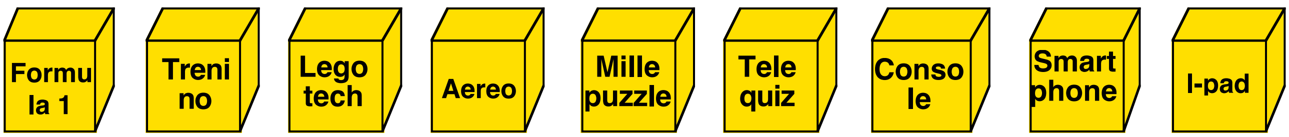
In tutti e due i problemi, la prima domanda ha lo scopo di portare l'allievo a capire che cos'è un percorso minimo lungo gli spigoli di una struttura cubica.
Nel problema 5.1 ogni percorso minimo si compone di tre spigoli. Le lettere a, b, c indicano le tre direzioni degli spigoli. A ogni percorso minimo si può far corrispondere un anagramma della parola abc e inversamente. Vi sono quindi 6=3·2 percorsi minimi diversi.
Nel problema 5.2, ogni percorso minimo si compone di 2 barrette in direzione E, 2 in direzione N e 2 in direzione A. Ogni percorso minimo si può codificare con un anagramma della parola EENNAA. In tutto abbiamo

$$\frac{6!}{2!\cdot 2!\cdot 2!}=\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{2\cdot 2\cdot 2}=6\cdot 5\cdot 3=90$$

percorsi minimi diversi.
Le sferette necessarie sono 27. Si possono contare in vari modi. Per esempio considerando i tre piani orizzontali, ciascuno dei quali contiene 9 sferette.
Le barrette sono 54, cioè, per esempio, 18 per ciascuna delle 3 direzioni.

In generale per costruire una struttura cubica nxnxn ci vogliono $(n+1)^3$ sferette: seguendo il ragionamento di prima, si possono considerare (n+1) sezioni orizzontali, ciascuna delle quali con $(n+1)^2$ sferette.
Il numero di barrette possiamo calcolarlo suddividendole secondo le tre direzioni. In totale sono $3\cdot n\cdot(n+1)^2$.

6. Una scelta impegnativa



Il vincitore di una gara riceve 4 premi che può scegliere fra i 9 disposti sul tavolo.
In seguito, il secondo classificato può scegliere 3 premi fra quelli rimasti.
Infine il terzo può scegliere 2 premi fra quelli rimasti.

Domande

- *In quanti modi il vincitore può scegliere i 4 premi?*
- *In quanti modi il secondo può scegliere i 3 premi?*
- *In quanti modi il terzo può scegliere i 2 premi?*

Commento

Un modo di risolvere questo problema, senza dover scomodare formule né produrre ragionamenti non del tutto alla portata degli allievi più giovani, consiste nell'immaginare che il vincitore percorra l'intera fila di premi e alla fine decida di selezionarne 4 ben determinati. Segna ciascuno dei premi scelti con la lettera S («Sì, lo prendo»). Gli altri automaticamente sono contrassegnati dalla lettera N («No, non lo prendo»). Ogni scelta del vincitore può quindi essere codificata con una parola di 9 lettere (tanti sono i premi a disposizione) composta di 4 lettere S (i premi scelti) e 5 lettere N (i premi non scelti). In tutto il vincitore può operare

$$\frac{9!}{4!\cdot 5!}=\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{4\cdot 3\cdot 2}=9\cdot 2\cdot 7=126$$

scelte diverse.
Il secondo classificato ha a disposizione 5 premi, dei quali ne può scegliere 3. Analogamente a quanto appena visto, potrà operare

$$\frac{5!}{3!\cdot 2!}=\frac{5\cdot 4}{2}=10$$

scelte diverse.
E il terzo? Può scegliere 2 premi fra i 2 rimasti, quindi… non può scegliere. In altre parole può solo ritirare i due premi rimasti.

7. Quiz vero-falso

Gli allievi di una scuola sono invitati a rispondere alle domande di un questionario che si compone di 8 domande del tipo vero-falso, numerate da 1 a 8.

Domande

- *Quante diverse risposte possono capitare?*
- *Se un allievo risponde «vero» ad almeno 6 domande, è considerato bambino (o bambina) felice. Quante diverse risposte corrispondono all'esito «bambino (o bambina) felice»?*

Commento

Riguardo alla prima richiesta, si può ragionare così: alla prima domanda del questionario si può rispondere con V (vero) o F (falso); per ciascuna di queste due risposte possibili alla seconda domanda si può di nuovo rispondere con V o F, quindi a un questionario di due domande si può rispondere in 2·2=4 modi; se il questionario si compone di 3 domande, le risposte possibili sono 4·2=8=2·2·2; con 4 domande si hanno 8·2=2·2·2·2=16 risposte possibili; e così via.
Il questionario che ci riguarda si compone di 8 domande, quindi vi sono 2·2·2·2·2·2·2·2=256 risposte diverse.
La seconda domanda ci riporta alla stessa situazione delle precedenti. Infatti ogni risposta con esattamente 6 V può essere codificata con una parola di 8 lettere delle quali 6 sono V e 2 sono F; di queste ne esistono (8! : 6!) : 2! = (8 · 7) : 2 = 28. L'esito «bambino (o bambina) felice» si verifica anche con 7 risposte V e una F; questa F può essere la risposta alla prima, alla seconda, alla terza e così via fino all'ottava; dunque abbiamo 8 risposte con 7 V e una F. Infine anche il questionario con 8 V ha lo stesso esito. In tutto abbiamo 28+8+1=37 modi diversi che danno il risultato «bambino (o bambina) felice».

8. I sette nani della Disney

Un negozio di giocattoli dispone di una partita di statuine raffiguranti ciascuna uno dei sette nani di Biancaneve: Dotto, Brontolo, Pisolo, Mammolo, Gongolo, Eolo e Cucciolo. In tutto sono 700, 100 per ogni nano. Daniela ha i soldi contati per comperare tre statuine e intende scegliere tre nani diversi.

Domanda

Quante scelte può operare?

Commento

Il problema consiste nello stabilire in quanti modi si possono scegliere 3 oggetti da un insieme di 7 oggetti. Come sempre, quando ci si trova di fronte a una situazione combinatoria, è utile immedesimarci in essa. Siamo Daniela. Abbiamo di fronte 7 nani allineati in un ordine qualsiasi. Passiamo in rassegna la fila di nani fin che decidiamo di prenderne 3 ben determinati che contrassegniamo con la lettera S (nano scelto). Gli esclusi possiamo immaginare di segnarli con la lettera N (nano non scelto). In questo modo ogni scelta viene codificata con una parola di 7 lettere, 3 S e 4 N. In totale abbiamo quindi
(7! : 3!) : 4! = 35
scelte possibili.
Faccio notare che nell'enunciato vi è un dato superfluo: «*In tutto sono 700, 100 per ogni nano*».
L'introduzione saltuaria di dati superflui, così come l'omissione dati necessari è una prassi che consiglio vivamente. Oltre che educare gli allievi ad analizzare criticamente ogni consegna scritta, si abituano ad affrontare situazioni non necessariamente determinate, come molto spesso accade nei contesti extra-scolastici.
Abbiamo così risolto un caso particolare del problema inteso a stabilire quanti sottoinsiemi di k elementi ha un insieme di n elementi ($n \geq k$). Ora, come spesso capita, nascono nuovi interrogativi:

- come possiamo calcolare il numero di sottoinsiemi di k elementi ha un insieme di n elementi?
- quanti sottoinsiemi possiede un insieme di n elementi?

9. Generalizzazione del problema 8

Domande

- *Daniela può scegliere 1, 2, 3, 4, 5, 6 o tutti e 7 i nani a disposizione. In quanti modi?*
- *Quanti sottoinsiemi di k elementi possiede un insieme di n elementi?*

Commento

Ovviamente queste domande vanno poste ad allievi che hanno già lavorato sulla situazione proposta dal problema 8. Alla prima domanda si può rispondere, per esempio, redigendo una tabella come la seguente:

k	n	numero sottoinsiemi
1	7	7
2	7	(7! : 2!) : 5! = 21
3	7	(7! : 3!) : 4! = 35
4	7	(7! : 4!) : 3! = 35
5	7	(7! : 5!) : 2! = 21
6	7	(7! : 6!) : 1! = 7
7	7	1

La seconda domanda richiede un conseguente sforzo di generalizzazione. Osservando la terza colonna della tabella si intravede la forma generale che dà il numero di sottoinsiemi di k elementi di un insieme di n elementi:

(n! : k!) : (n–k)! in forma frazionaria $\dfrac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$

La terza domanda ci permette di fare un importante passo in avanti nello studio di questa situazione.

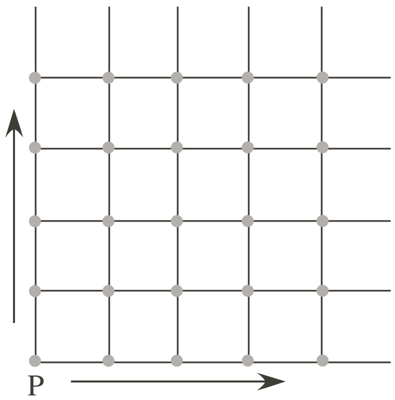
Per calcolare il numero di sottoinsiemi di un insieme I di n elementi si può procedere così. Immaginiamo di allineare gli elementi di I secondo un ordine qualsiasi. Un qualunque sottoinsieme possiamo generarlo così:

- prendiamo il primo elemento di I e decidiamo se metterlo o no nel sottoinsieme: abbiamo 2 possibilità (lo mettiamo / non lo mettiamo)
- prendiamo il secondo elemento di I e decidiamo se metterlo o no nel sottoinsieme: abbiamo di nuovo 2 possibilità per ciascuna delle precedenti, in totale $2 \cdot 2$ diversi sottoinsiemi
- prendiamo il terzo elemento di I e decidiamo se metterlo o no nel sottoinsieme: abbiamo di nuovo 2 possibilità per ciascuna delle precedenti, in totale $2 \cdot 2 \cdot 2$ diversi sottoinsiemi
- e così fino all'ennesimo elemento di I

In totale, i sottoinsiemi dell'insieme I di n elementi sono

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{\text{n fattori}} = 2^n$$

10. Dai percorsi sulla griglia al triangolo di Pascal-Tartaglia



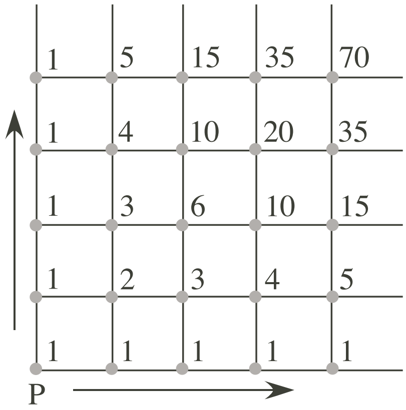
Ogni percorso parte da P e si snoda lungo la griglia seguendo le direzioni indicate.

Domande

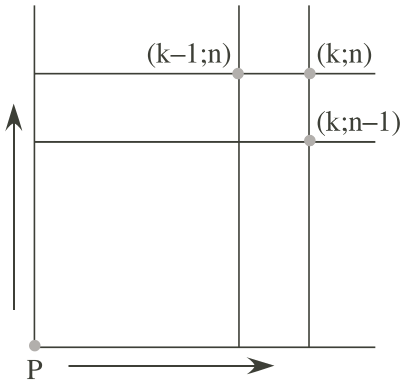
- *Accanto a ogni nodo, inserisci il numero di percorsi minimi che conducono a esso.*
- *Ciascuno di questi numeri si può anche ottenere con un'addizione: quale?*
- *Verifica in generale la legge additiva che hai trovato.*

Commento

Per il calcolo dei percorsi minimi, ci si può riferire al problema 3.3 «Il Grande Parco Rettangolo». Si ottiene la figura seguente:



Gli allievi (anche di scuola media e persino di quarta-quinta elementare) non tardano molto ad accorgersi che ogni numero di percorsi minimi può essere ottenuto addizionando i numeri di due nodi adiacenti (quello a sinistra e quello in basso). Per esempio, 6=3+3, 35=20+15 ecc.
Per gli studenti liceali, dimostrare questa legge additiva è un ottimo esercizio di manipolazione dei fattoriali.
Possiamo per esempio procedere così: consideriamo la figura seguente che ci permette di dedurre la somma che dà il numero corrispondente al nodo generico di coordinate (k;n–k)



Calcoliamo la somma dei numeri corrispondenti ai nodi adiacenti di coordinate (k;n–1) e (k–1;n)

$$\frac{(n-1)!}{k!\cdot(n-1-k)!}+\frac{(n-1)!}{(k-1)!\cdot(n-1-(k-1))!}=\frac{(n-1)!}{k!\cdot(n-1-k)!}\cdot\frac{(n-k)}{(n-k)}+\frac{(n-1)!}{(k-1)!\cdot(n-1-(k-1))!}\cdot\frac{k}{k}=$$

$$\frac{(n-k)\cdot(n-1)!+(n-1)!\cdot k}{k!\cdot(n-k)!}=\frac{(n-1)!\cdot(n-k+k)}{k!\cdot(n-k)!}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$$

Abbiamo ottenuto esattamente il numero di percorsi minimi corrispondenti al nodo di coordinate (k;n). La legge additiva è così dimostrata.
Infine ricordiamo che il triangolo di Pascal-Tartaglia altri non è che lo schema ottenuto per rispondere alla prima domanda, ruotato di 135°

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
…

11. Sviluppo della potenza di un binomio

Già nella scuola media hai imparato a usare e riconoscere uno dei cosiddetti prodotti notevoli, più precisamente, il quadrato di un binomio. Al liceo si va oltre e si considerano le potenze successive del binomio.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3\,a^2\,b + 3\,a\,b^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4\,a^3\,b + 6\,a^2\,b^2 + 4\,a\,b^3 + b^4$$

Si possono evidenziare due caratteristiche di questi sviluppi:

- *le formule sono costituite da monomi di uguale grado rispetto alle lettere a, b*
- *i coefficienti numerici possono essere trovati in modo sbrigativo usando il triangolo di Pascal-Tartaglia.*

Domande

- *Come mai i coefficienti dei termini dello sviluppo di $(a + b)^n$ coincidono con i numeri dei percorsi minimi corrispondenti ai nodi della griglia quadrata?*
- *Scrivi lo sviluppo di $(a + b)^n$*

Commento

Può essere utile scrivere per esteso il prodotto di n fattori uguali ad (a+b)

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)\cdot\ldots\cdot(a+b)\cdot\ldots\cdot(a+b)}_{\text{n fattori}}$$

Osserviamo che i termini dello sviluppo si ottengono applicando n volte la proprietà distributiva; ciò porta ad affermare che la parte letterale di ogni termine è del tipo
$a^k \cdot b^{n-k}$, con k=0,1,2,…,n
Per ottenere uno qualsiasi di questi termini, occorre scegliere a da k parentesi e, ovviamente, b dalle (n–k) rimanenti. Sappiamo però che per scegliere k oggetti da un insieme di n oggetti vi sono

$$\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$$

possibilità, tanti sono gli addendi con la parte letterale $a^k \cdot b^{n-k}$
Si può anche osservare che la successione di questi coefficienti è simmetrica, cioè
Il k-esimo coefficiente è uguale al (n–k)-esimo. Infatti:

$$\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot(n-(n-k))!}$$

Il termine generico dello sviluppo è quindi

$$\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}\cdot a^k \cdot b^{n-k}$$

Lo studente può controllare la correttezza di questa espressione, confrontandola con i termini di sviluppi che conosce. Per esempio, per n=4, abbiamo:

per k =0: $1 \cdot a^0 \cdot b^{4-0} = b^4$
per k=1: $4 \cdot a^1 \cdot b^{4-1} = 4 \cdot a \cdot b^3$
per k=2: $6 \cdot a^2 \cdot b^{4-2} = 6 \cdot a^2 \cdot b^2$
per k=3: $4 \cdot a^3 \cdot b^{4-3} = 4 \cdot a^3 \cdot b$
per k=4: $1 \cdot a^4 \cdot b^{4-4} = 1 \cdot a^4$

Per completezza, scriviamo in due modi lo sviluppo di $(a + b)^n$

$$(a+b)^n = a^n + n\cdot a^{n-1}\cdot b + \frac{n\cdot(n-1)}{2}\cdot a^{n-2}\cdot b^2 + \ldots + \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}\cdot a^k\cdot b^{n-k} + \ldots + b^n$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}\cdot a^k\cdot b^{n-k}$$

Risultati noti, quindi nessuna novità strettamente matematica, ma, forse, un modo efficiente per portare gli allievi alla consapevolezza che dietro alle formule stanno concetti e procedimenti di natura combinatoria retti dalla stessa struttura matematica, ciò che, fra l'altro, libera lo studente dalla necessità di memorizzare formule per lui assai complicate.

12. Insiemi e sottoinsiemi

Domanda

Quanti sottoinsiemi possiede un insieme di n elementi?

Commento

Come sempre si dovrebbe, per risolvere una questione combinatoria è consigliabile mettersi in situazione. Abbiamo davanti a noi un insieme I di n elementi e dobbiamo formare un sottoinsieme. Immaginiamo di allineare secondo un ordine qualsiasi gli elementi di I e iniziamo a passarli in rassegna. Il primo elemento lo possiamo mettere nel sottoinsieme oppure no: abbiamo due possibilità. Il secondo elemento lo possiamo mettere nel sottoinsieme oppure no: per ciascuna delle due possibilità precedenti, ne abbiamo di nuovo due: in totale 2·2 possibilità. Stessa cosa per il terzo elemento, ciò che ci porta a capire che l'esame dei primi 3 elementi può essere fatto in 2·2·2 modi. E così via. Concludiamo affermando che l'esame completo degli n elementi può essere fatto in

$$\underbrace{2\cdot 2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2}_{\text{n fattori}} = 2^n \quad \text{con } n = 0,1,2\ldots,n$$

modi diversi, ciascuno dei quali genera un sottoinsieme diverso.
È forse utile esaminare i primi due valori: per n=0, $2^0=1$, questo valore indica che l'insieme vuoto (che ha 0 elementi) ha un solo sottoinsieme: se stesso. Per n=1, $2^1=2$, l'insieme singolo (che ha un solo elemento) possiede 2 sottoinsiemi: il vuoto e se stesso.
Ora si può osservare che se si sommano tutti i numeri dei sottoinsiemi di k elementi, per k=0, 1, 2, … , n si dovrebbe ottenere 2^n.
Proviamo a eseguire il calcolo, tenendo conto che 0!=1 e 1!=1, che l'insieme I ha n elementi, che k (numero di elementi del generico sottoinsieme) varia da 0 a n e che infine un esistono

$$\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$$

sottoinsiemi di k elementi.

$$\frac{n!}{0!\cdot(n-0)!} + \frac{n!}{1!\cdot(n-1)!} + \frac{n!}{2!\cdot(n-2)!} + \ldots + \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} + \ldots + \frac{n!}{n!\cdot(n-n)!} =$$

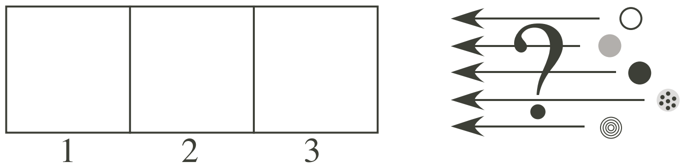
$$= 1 + n + \frac{n\cdot(n-1)}{2} + \ldots + \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} + \ldots + 1 =$$

$$= 1^n + n\cdot 1^{n-1}\cdot 1 + \frac{n\cdot(n-1)}{2}\cdot 1^{n-2}\cdot 1^2 + \ldots + \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}\cdot 1^k\cdot 1^{n-k} + \ldots + 1^n = (1+1)^n = 2^n$$

L'inserimento delle potenze di 1 nei prodotti non cambia evidentemente la sostanza, ma permette di interpretare l'intera somma come sviluppo di $(1+1)^n$

Mi ripeto, niente di stratosferico rispetto alla matematica, ma con forte valenza didattica. La costruzione della somma e la successiva interpretazione come sviluppo della potenza di (1+1), anche se compiuta con l'aiuto dell'insegnante, si rivela essere un'importante attività che l'allievo compie nella zona di sviluppo prossimale, per dirla con Vygotskij.
In altre parole, un momento di apprendimento formativo in gran parte di tipo strategico e concettuale.

13. Distribuire oggetti distinti in cassetti



Domanda

In quanti modi si possono distribuire 5 oggetti distinti in 3 cassetti?

Commento e generalizzazione

Immaginiamo di eseguire l'operazione. Per collocare il primo oggetto (pallina bianca) abbiamo 3 possibilità. Per collocare il secondo oggetto (pallina grigia) abbiamo di nuovo 3 possibilità per ciascuna delle precedenti, quindi $3 \cdot 3$. Per collocare il terzo oggetto (pallina nera) abbiamo di nuovo 3 possibilità per ciascuna delle precedenti, quindi $3 \cdot 3 \cdot 3$. E così per collocare le rimanenti.
In totale si hanno
$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5 = 243$
modi possibili di distribuire 5 oggetti in 3 cassetti.
La generalizzazione è immediata. Per distribuire n oggetti distinti in k cassetti vi sono k^n possibilità.

14. Le schedine dello Sport-toto

Nel concorso dello Sport-toto, ogni giocatore scommette sull'esito di 13 partite di calcio, componendo una colonna di tredici segni, scelti dall'insieme {1, 2, X}, nel quale «1» significa vittoria della squadra di casa, «2» vittoria della squadra in trasferta e «X» pareggio. In teoria, per essere sicuri di azzeccare un tredici (cioè indovinare l'esito di tutte e 13 le partite), occorre giocare tutte le colonne possibili.

Domande

- *Quante diverse colonne esistono?*
- *Se un giocatore fosse convinto che 3 partite avranno un determinato esito, su quante colonne dovrebbe scommettere per essere sicuro di azzeccare un tredici? E se fosse convinto dell'esito di 6 partite?*
- *Che cosa potresti dedurre osservando le risposte alla domanda precedente?*

Commento

Come già detto, è buona abitudine immaginare di comporre una colonna, senza tenere conto di quali squadre giocano. Nella prima casella della colonna possiamo scegliere fra 3 possibilità. Nella

seconda, pure; in totale, se la colonna si limitasse a due caselle (o partite) si avrebbero 3·3 colonne diverse. Con tre caselle si avrebbero 3·3·3 colonne diverse, e così via.
Le caselle diverse di una colonna completa sono 13, quindi si hanno 3^{13}=1'594'323 colonne possibili.
È pure consigliabile suggerire agli allievi che questo problema può essere ricondotto a quello precedente. In che modo?
Basta immaginare di avere tre cassetti contrassegnati ordinatamente con i simboli «1», «2» e «X», mentre le 13 partite si possono considerare oggetti distinti da distribuire casualmente nei tre cassetti. In totale si hanno quindi 3^{13} colonne possibili.

La seconda domanda ci introduce in un contesto interessante. Se le partite dall'esito incerto fossero 10 (13–3), le colonne possibili sarebbero 3^{10}=59'049. Se le partite dall'esito incerto fossero 7 (13–6), le colonne possibili sarebbero 3^{7}=2'187.
Dal punto di vista strettamente matematico si può notare come diminuendo il numero di partite incerte, il numero di colonne possibili diminuisce fortemente. Gli specialisti, detti sistemisti, propongono anche situazioni in cui per determinate partite si restringe l'esito a due soli valori, per esempio «1» o «X», scartando a priori la vittoria in trasferta. Insomma, ci si può divertire studiando sistemi che riducono al massimo il numero di colonne possibili, correndo ovviamente il rischio crescente di sbagliare i risultati considerati «sicuri».

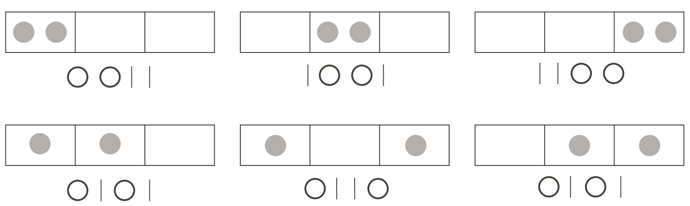
La terza domanda è aperta. Si possono fare molte considerazioni sulla convenienza o no di giocare allo Sport-toto e, se proprio lo si volesse, come converrebbe procedere.

15. Distribuire oggetti indistinguibili in cassetti

Domanda

In quanti modi si possono distribuire 2 oggetti identici in 3 cassetti?

Commento e generalizzazione



Visto che i numeri di cassetti e di oggetti sono esigui, possiamo abbastanza facilmente disegnare tutti i casi possibili, per esempio considerando dapprima i casi in cui i due oggetti sono insieme e poi quelli in cui sono separati, come mostrato nella figura. In seguito cerchiamo un modo per codificare ogni distribuzione. Ogni oggetto può essere rappresentato da un cerchietto e per i 3 cassetti bastano 2 (=3–1) tratti verticali (a prima vista si direbbe che ce ne vogliano 4, ma i due che delimiterebbero l'inizio del primo cassetto e la fine del terzo sono superflui). Ogni possibile distribuzione può quindi essere codificata con una parola (in senso lato) composta di 4 lettere, uguali a due a due. Sappiamo quindi che vi sono in tutto (4! : 2!) : 2! = 6 distribuzioni possibili.

Vogliamo ora esprimere in generale il numero delle diverse distribuzioni di n oggetti identici in k cassetti. Osserviamo che la parola che codifica una generica distribuzione si compone di (n+k–1) lettere (o segni) delle quali n sono uguali (i cerchietti che simboleggiano gli oggetti) e k–1 sono uguali fra loro ma diversi dalle precedenti. Possiamo quindi scrivere:

$$\frac{(n+k-1)!}{(k-1)!\cdot(n+k-1-(k-1))!}=\frac{(n+k-1)!}{(k-1)!\cdot n!}$$

formula assolutamente da non memorizzare, mentre ciò che è importante da apprendere è la strategia della codificazione.

16. Reti segnate

In 9 partite una squadra di calcio ha segnato 18 reti.
«Due per partita?» potrebbe essere, ma non è detto.
«Tutte e 18 in una sola partita?» poco probabile, ma potrebbe essere.

Domanda

In quanti modi possono essere distribuite le 18 reti (senza fare alcuna distinzione) nelle 9 partite disputate?

Commento

Come sempre, quando si tratta di problemi combinatori, un buon metodo di risoluzione consiste nel mettersi in situazione. Le 18 reti sono pensabili come altrettanti oggetti identici da distribuire in 9 cassetti (le 9 partite). Così il calcolo è presto fatto:

$$\frac{(18+9-1)!}{(9-1)!\cdot 18!}=\frac{26!}{8!\cdot 18!}=1'562'275$$

Difficilmente uno studente avrebbe stimato un risultato sopra il milione: il calcolo combinatorio porta spesso a risultati che il cosiddetto “buon senso” o, meglio, il senso dei numeri al quale ogni individuo pensa di aggrapparsi, non permette assolutamente di prevedere.

E se si volessero distinguere le reti? Per esempio, quella ottenuta dal tale giocatore su calcio di rigore al 94° minuto ecc.? Avremmo allora 18 oggetti distinti da distribuire in 9 cassetti, cioè $9^{18} \cong 1{,}5 \cdot 10^{17}$
Senza commento.

17. Sacchetti di caramelle

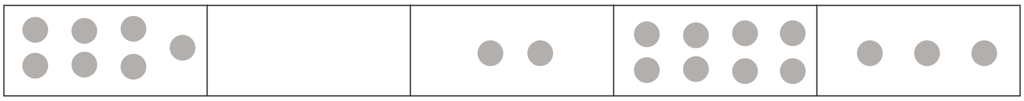
In una fabbrica di dolci, una macchina produce sacchetti di caramelle miste. Nell’apposito serbatoio vi sono in gran quantità caramelle dei seguenti gusti: fragola, limone, arancia, menta e caffè. La macchina confeziona sacchetti di 20 caramelle ciascuno, distribuendole casualmente.

Domanda

Quanti differenti sacchetti può produrre la macchina?

Commento

Anche questo problema rientra nella situazione generale della distribuzione di oggetti identici in cassetti. Immaginiamo di avere tanti cassetti quanti sono i gusti a disposizione, quindi 5. Ogni distribuzione può essere assimilata a una distribuzione di 20 oggetti identici in 5 cassetti. La figura seguente mostra una di queste distribuzioni e più precisamente quella di un sacchetto con 7 caramelle alla fragola, nessuna al limone, 2 all’arancia, 8 alla menta e 3 al caffè.



fragola limone arancia menta caffè

I sacchetti dal contenuto diverso sono perciò in tutto

$$\frac{(20+5-1)!}{(5-1)!\cdot 20!}=\frac{24!}{4!\cdot 20!}=23\cdot 22\cdot 21=10'626$$

18. Ancora i sette nani della Disney

Un negozio di giocattoli ha comperato una partita di statuine raffiguranti ciascuna uno dei sette nani di Biancaneve: Dotto, Brontolo, Pisolo, Mammolo, Gongolo, Eolo e Cucciolo. In tutto sono 700, 100 per ogni nano. A sua volta ogni nano è dipinto con un unico colore: bianco, rosso, blu, verde o giallo (20 statuine per ogni colore). Le statuine vengono messe in vendita in confezioni da 12, riempite casualmente.

Domanda

Quante diverse confezioni si possono mettere in vendita?

Commento

La situazione ricorda quella del problema 8, ma la struttura matematica è del tutto diversa. Immaginiamo di disporre 7 scatole (una per nome) e di suddividere ogni scatola in 5 compartimenti (uno per colore). Otteniamo così 35 compartimenti (corrispondenti a ciascuna statuina per tipo e per colore) nei quali, analogamente al caso di prima, distribuire 12 oggetti a caso. Possiamo quindi scrivere

$$\text{N(confezioni)} = \frac{46!}{34!\cdot 12!} = 38'910'617'655$$

Chi l'avrebbe detto? Nessuno, ma lo dice la matematica!